Title	Das Dehnsche Lemma 就テ
Author(s)	小松, 醇郎
Citation	全国紙上数学談話会. 15 p.1-p.7
Issue Date	1934-10-12
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/73878
rights	
Note	

全國紙上數學談話會 第15号. 十月

41. Das Dehnsche Lemma ニ就テ

小松醇郎（阪大）

M Dehn ハ Math. Ann. 69 Bd. デ以下ニ述ベル所謂 Dehnsches Lemma ナル定理ヲ證明シタ。所ガ後ニソノ証明ノ缺陷ヲ指摘シタノハ H. Kneser デアル。（Jahresbericht der Deut. Math. Verein. 38 Bd.）。本年 I. Johanssen ガ此ノ Vermutung ヲ進メテ „Dehn-Diagramm" ナル概念ヲ導入シテ居ル。（Math. Ann. 110 Bd）dass Dehn-Diagramm ノ性質ヲ求メテ此ノ Dehnsches Lemma ノ證明ヲ完了シタトカラ 此下此ノ證明ニ必要ナ Dehn, Johansson ノ結果ヲ紹介シ後ソレヲ利用スル事ノ証明ヲ述ベテ見マス。

Das Dehnsche Lemma:

Jede geschlossene Kurve K, die in einer homogenen topologischen Mannigfaltigkeit M von wenigstens drei Dimensionen eine singuläre d.h sich selbst durchdringende) Elementarfläche berandet, auch eine singularitätenfreie Elementarfläche in M berandet, wenn bloss die Kurve K selbst von den Singularitäten nicht getroffen wird.

茲デ homogen トハソノ各点ノ Umgebung ガ常ニ M ノ次元ノ球内部ト homöomorph デアル事ヲ表シ、Elementarfläche (singularitätenfreie) トハ一ツノ二次元 Simplex ト homöomorph ナモノ、singulär トハソノ eindeutige stetige Bild (eineindeutig デハナイ) ヲ表ス。

Dehn ハ先ヅ M ガ 3 次元ヨリ高次元ナラバ trivial, ソコデ 3 次元ノミヲ考ヘル

1. AB (A≠B) ガ幾重ニモ重ナツタ Strecke トスル、即 Singularitätenfreie Elementarfläche 上ノ多クノ Strecke ガ AB ニ stetig abbilden シテ居ル。M homogen カラ AB ノ Umgebung ハ Elementarraumstück。ソコデ AB ニ沿ウテ交凡ベテノ Blätter ハ切スルモノデアルト仮定スル。此ノ各 Blätter ノ代リニ充分イ Blätter ヲ代用シテ AB ヲ通ラズ且新シイ Singularitäten ガ生ジナイ様ヲ出ル。

A ガ幾重ニモ重ナレル点トシ且 A カラ出ル Singuläre Strecke ハナイトスルモ多クノ Blätter ガ切スルダケダカラ前ト同様ナ prozess デ Singularitätenfrei ナル

2 n重 (n>2) ニ数ヘラレル singuläres Strecke ハ各 Blätter ノ近イモノヲ代スル事ニヨツテ2重ノ Singuläre Strecke ノミトナル。

n重 (n>3) ニ数ヘラレル Singulärer Punkt モ同様ニ benachbarte Blätter ノ代用ニヨリ3重ノモノニ帰着スル。1ニ依リ結局此ノ Singularitäten ハ交ル合ノミデアル。

ソコデ先ヅ Singuläre Linie ノウチソレガ ungeschlossen ノ場合ハ次ノ如ク Singularitätenfrei ニナル。Singularitätenfreie Elementarfläche E^2 ノ eindeutige stetige Bild ヲ E'^2 デ表ス。E'^2 上 AB ヲ Endpunkt トスル singuläre Linie l ニ対シ E^2 上 l', l'' ガ対応スル。E^2 上デ singuläre Linie ノ Urbild ガ ungeschlossen ト言フ事ハアリ得ナイ (E^2 ノ Rand ハ singularitätenfrei) カラダ。

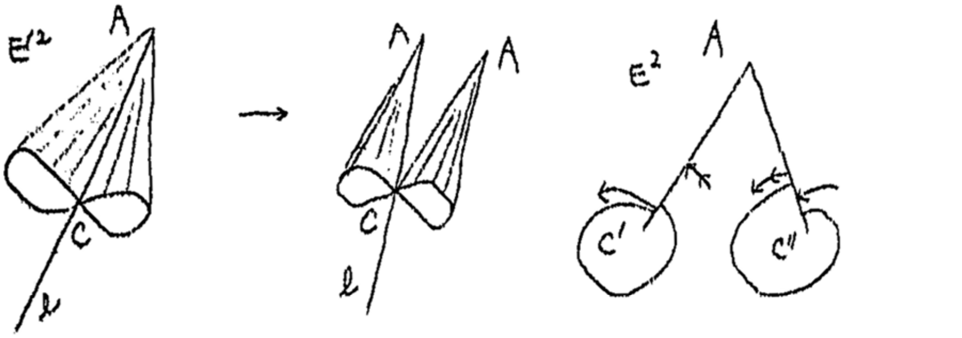
図

A, B : Verzweigungspunkt

l', l'' ノ交点 C ハ l' 上ノ点ト考ヘルト C' 之ガ E'^2 デ

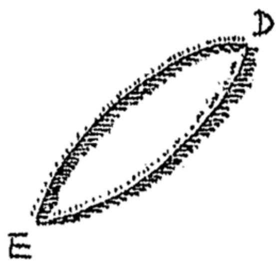
ト重ナル点C''ハ一般ニE^2デハC'ト一致シナイ.

AC' ト AC'' トガ E'^2 デ自切線. ソレ故 E'^2 上ノ AC ノ線ニ沿ヒ „Umschaltung" 行フ. 即 AC ニ沿ヒ結合方法ヲ変ヘ新シイ Blätter ハ AC デ互ヒニ切スル様ニス



ルデ前ニ一重ノ点Aガニニ、ニ重ノ点Cガ一重ニナル. 是ニ依ツテ頂点ノ数α^0不 從テおいれる指標モ不変 且 zusammenhängend ダ ラ矢張リ一様連結デアル.

Cカラヌ ungeschlossene Doppellinie ガ出ル. 此処デ同様ナ手続キヲ行ヒ結 E^2上デ ℓ', ℓ'' ト交ハラナイ様ニナル. $DE = \{(DE)', (DE)''\}$ デ $(DE)'$, $(DE)''$ 交ラナイトスルト圖ノ如ク結合シ変ヘル.

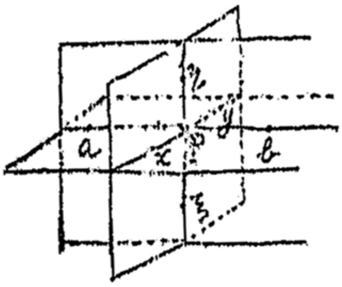


此ノ Umschaltung デ結局 einfach zusammenhängend デ Singularitätenfrei ニ出来ル.

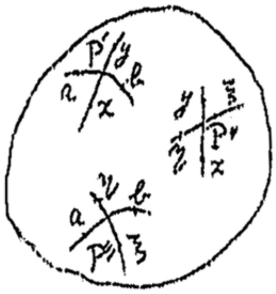
次ニ Singuläre Linie ガ geschlossen デアルガ自ラ交ハラナイ限リ dreifacher Punkt ノナイトキハ前ノ Umschaltung ニテ singularitätenfrei ニナシ得ル.

dreifacher Punkt ノアル geschlossene Doppellinie ノ場合ノ Dehn ノ証明ハ不備デアル. ソコデ Johansson ノ試ミノウチ必要ナ部分ダケヲ紹介スル.

dreifacher Punkt P ノ近傍デ doppellinie ノ上ニ六個ノ „Nachbarpunkte" a, b, x, y, z, ζ ヲトル. 是ヲ E^2 デハ圖ノ如クナッテ居ル.



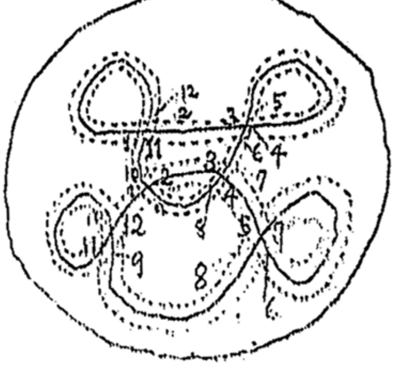
E'^2 E^2



dreifacher Punkt Nachbarpunkte トノ関係ヲE^2上デ表シタ Diagramm ガ次ノ條件ヲ充ストキ Dehn-Diagramm ト云フ. Die Schnittpunkte des Diagramms müssen derart in Gruppen von je drei zerfallen, dass ihre zwölf Nachbarpunkte nach dem folgenden Schema zu je zwei gleich bezeichnet sind:

A	Schnittpunkt	von	Strecken	ab	und	cd
B	"	"	"	cd	"	ef
C	"	"	"	ef	"	ab

Dreifacher Punkt ガ Singularitätenbehaftete Elementarfläche デ realisieren スルトキノ必要條件デアル. 扨テ E^2 上 Nachbarkurven ヲ引キ Spurkurven トノ交点 Nachbarpunkte. 是ヲ次ノ如然ニ Klasse ニ分ケル.



α). Nachbarpunkte, die auf derselben Nachbarkurve liegen, werden zusammengefasst.

β). Gleichbezeichnete Nachbarpunkte werden zusammengefasst

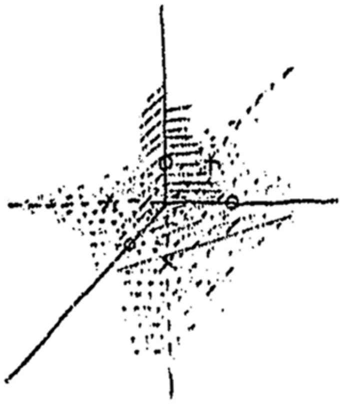
γ). Wenn a mit b und b mit c zusammengefasst sind, dann wird auch a mit c zusammengefasst.

上ノ圖デハ二ツノ Klas

前ノ図デハ二ツノ Klasse ニ分ケラレ [1, 4, 5, 8, 9, 12], [2, 3, 6, 7, 10, 11] トナル. Klasseneinteilung ヲ使ヒ Dehn-Diagramm ノ Realisierbarkeit ノ Kriterium ガ次ノ如ク言ヘル. Für die Realisierbarkeit eines Dehn-Diagramms ist notwendig und hinreichend, dass entgegengesetzte Nachbarpunkte niemals zur selben Klasse gehören. E'^2 上ノ閉曲線ハ homotop 0 デアルカラ ニ沿ヒ E' Indikatrix 不変ト言フ事カラ証明出来ル. 証明略.

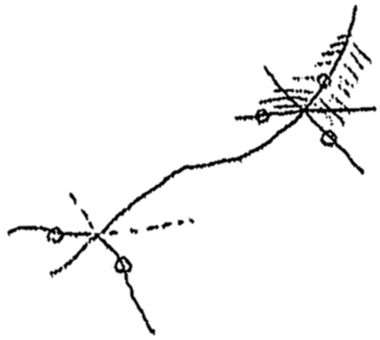
以上 Johansson ノ結果ハ E'^2 上デ Dehn-Diagramm ノ性質ヲ求メタ事ニナル. 今 E'^2 ニ realisieren サレタ状態ヲ調ベテ見ル. Nachbarpunkte ノ Johansson Klasseneinteilung ハ必ズシモ二ツノ Klasse ノミニ分レルトハ限ラナイ. 然是ヲ E'^2 上デ考ヘルト常ニ二ツノ Klasse ニナル. 何トナレバ E'^2 ハ homotop 0 デアルカラ常ニ orientierbar. 然レソノ中ノ閉曲線ニ沿フ空間部分ハ nicht-orientierbar デアリ得ル. 今 E'^2 ヲ orientierte Flächenkomplex ニスル. ソノ各点デソノ Orientierung ニ一定関係ノ Vektor ヲ立テル. ソレ故 E'^2 ノ一閉曲線ニ沿ヒ元ニ戻レバ Indikatrix umkehren シテモ E'^2 ノ曲面部分ニ沿ヒ元ニ戻レバ即チ E'^2 上ノ曲線ニ沿ヒ元ニ戻ル事ニ相当スル) 必ズ Indikatrix erhalten テ 切ル. 此ノ Vektor ノ方向ト, ソノ逆ノ方向トノ二ツニ分ケレバ凡ベテノ Nachbarpunkte ハ二ツノ Klasse ニ分ケラレ

シ 今各 dreifacher Punkt デ六ツノ Nachbarpunkte ヲ Klasseneinteilung シテ置イテ其処デ次ノ如キ規則ニ従ッテ Umschaltung ヲ行 dreifacher Punkt ノ近傍ハ八ツノ象限ニ分タル. ソノウチ二個ハソノ三本軸上ノ Nachbarpunkte ハ同ジ Klasse ノモノデアル. ソノ三ツノ Blätter ヲツニツナグ. 残リノ各 Blätter ヲ夫々 Doppellinie ニ沿ヒ結ビ合セル.



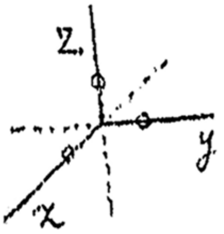
○トメトデ Klasse ヲ示ス。Umschaltung ハ見ニヨリ dreifacher Punkt ハ三重ニ数ヘラル。Doppellinie ハ二重ニ数ヘラレル。

一ツノ Dreifacher Punkt ガラ次ノ dreifacher Punkt ニ到ルトキ Klasseneinteilung der Nachbarpunkte ハ圏ノ如クナッテ居ル筈ダカラ此処ノ Umschaltung 規則ハ常ニ凡テニ適用スル事ガ出来ル。



尚此ノ際此ノ Umschaltung ガ出来ル

Singularitätenfreie Fläche ハ Orientierbar デアル事ヲ証明スル、



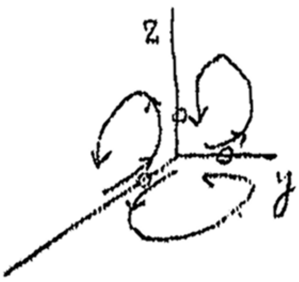
図ノ如キ Klasseneinteilung デアッタトスレバ E^2 ノ Orientierung, 従ッテ E^2 ノ Orientierung ハ

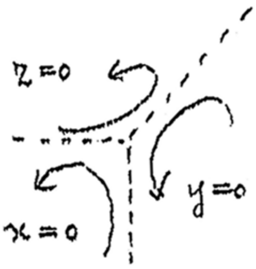
$z=0$ デハ x ノ正ノ方向カラ y ノ正ノ方向ヘノ回転

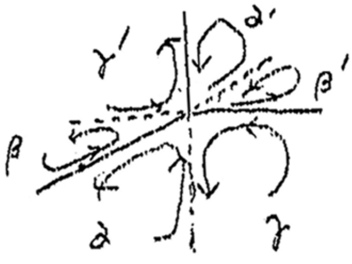
$y=0$ 〃 z ―――― x ―――― 〃

$x=0$ 〃 y ―――― z ―――― 〃

其処デ此ノ Orientierung ヲ図示シ結合スル Blätter ノソレヲ比較スレバ







α,α' Blatt ハ $y=0$ 平面,
β,β' Blatt ハ $z=0$ 平面,
γ,γ' ハ $x=0$ 平面,

扨テ此ノ singularitätenfreie Fläche ガ zusammenhangend デナイトルナラバ一ツノ閉曲面ガ切スル少クモ一本ノ Doppellinie ハ（現在デハ切スルニ沿ヒ他ノ曲面ガ接スル、一ツノ閉曲面ニ対シテ唯一ツノ Doppelstrecke（三）点カラ次ノ三重点マデノ間ノ）ヲ削リ Umschaltung ヲ行フ、尚未ダRテガ zusammenhängend ニナラナイナラ離レテ居ル一ツノ曲面ヲトリソノ一本ノ Doppelstrecke ニツギ Umschaltung ヲ行フ、之ヲ続ケテ結局皆 zusammenhangend ナル 此ノ場合ハ Orientierbare Fläche ノ結合デアルカラ矢張リ Orientierbar ノ曲面デアル、

扨テ此ノ曲面ニテ Triangulation ヲ考ヘおいれる指標ヲ計算スルト元ノ E'^2 ノ Triangulation ニテ dreifacher Punkt ヲ 3倍, Doppellinie ノ2倍ニ勘定シタモノニ等シ、所ガ是ハ即チ E^2 ノ Eulersche Charakteristik デアッテ $\chi(E^2)=1$.

出来上ッタ曲面ノベッチ数 p^0, p^1, p^2 トスレバ Rand ガアルカラ $p^2=0$, zusammenhangend デアルカラ p^0 ヲ1

$$\therefore \quad 1 = p^0 - p^1 + p^2 = 1 - p^1.$$

即チ此ノ曲面ハ Orientierbar デ einfach zusammenhangend デアル

此ノ Dehnsches Lemma ヲ使ヘバ H. Kneser ノ所謂 Überraschendes etz ガ証明出来ル、 (9 10, 12)